

Aus der Kieferorthopädischen Abteilung des zahnärztlichen Institutes
der Universität Basel

Vorsteher: Prof. Dr. med. dent. R. Bay

Die Beziehungen zwischen der Breite des Gesichtes, des Zahnbogens und der Zähne

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der Zahnheilkunde
der medizinischen Fakultät der Universität Basel

vorgelegt von

René Markowitsch

von Basel



BASEL (Schweiz)

S. KARGER

NEW YORK

Von der Medizinischen Fakultät Basel
genehmigt auf Antrag von Prof. Dr. R. Bay
Tag der Promotion: 3. März 1955

Einleitung

Die vorliegende Arbeit wurde nur ermöglicht dank dem liebenswürdigen Entgegenkommen vieler Professoren, Behörden, Lehrer und Privatpersonen. An erster Stelle möchte ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. R. Bay für seine Anregung, für seine Beratung und Mithilfe aus reicher Erfahrung herzlich danken. Die zu Messungen benützten Schädel konnte ich dank der gütigen Erlaubnis des Vorstehers des anatomischen Institutes, Herrn Prof. Dr. E. Ludwig, aus der dortigen anatomischen Sammlung entnehmen. Ferner benutzte ich einige wenige Schädel aus der pathologischen und physiologischen Anstalt, sowie aus dem Bürgerspital, dem zahnärztlichen Institut und aus privaten Händen.

Zur Messung von 1100 Schulkindern erhielt ich im Kanton Basel-Stadt von schulärztlicher Seite leider keine Erlaubnis. Aber dank dem Erziehungsdepartement des Kantons Baselland sowie besonders Herrn Schulinspektor Bürgin, wurde es mir in sehr zuvorkommender Weise gestattet, die Messungen in Schulen von Liestal, Pratteln und Muttenz durchzuführen; ihnen sowie den betreffenden Herren Rektoren und Lehrern möchte ich für ihre Bemühungen besonders danken.

Schließlich stellten sich mir freundlicherweise je 50 Männer und Frauen zur Verfügung, die ich teils im zahnärztlichen Institut, teils in der Frauenarbeitsschule dank der gütigen Erlaubnis der Vorsteherin, Frä. Bossert, sowie des Erziehungsdepartementes des Kantons Basel-Stadt messen durfte.

Die mathematischen Beweisführungen sowie die Überprüfung der mathematischen und graphischen Darstellungen verdanke ich Herrn Dr. R. Conzelmann, Mathematiklehrer in Basel.



INHALT

1. Zweck der Untersuchungen	117
2. Untersuchtes Material	118
3. Durchgeführte Messungen	119
4. Die Ergebnisse der 100 Schädelmessungen	120
5. Methoden nach <i>Izard, Pont</i> und <i>Berger</i>	121
6. Die Ergebnisse aus den 1200 Personenmessungen, Wachstum – Alter – Geschlecht	122
7. Das <i>Bergersche</i> Gesetz	124
8. Über die Vorteile der Wahl der Bitragialbreite als Bezugsgröße . . .	125
9. Das statistische Problem der Abhängigkeit zweier Größen. Regressions- gerade, Korrelationskoeffizient	127
10. Die Beziehung der Bitragialbreite zur Molarendistanz	132
11. Die <i>Pontsche</i> Methode und ihre Fehler	134
12. Zur Wahl der geeigneten Bezugsgröße für die Molarendistanz. Praktische Anwendung	136
13. Die Herstellung der speziellen Abdruckmodelle für orthopädische Zwecke	138
14. Literaturverzeichnis	142

Aus der Kieferorthopädischen Abteilung des zahnärztlichen Institutes
der Universität Basel

Vorsteher: Prof. Dr. med. dent. R. Bay

DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DER BREITE DES GESICHTES, DES ZAHNBOGENS UND DER ZÄHNE

Von RENÉ MARKOWITSCH

Fragestellung

1. Zweck der Untersuchungen

Die Ausführungen sollen einerseits am Beispiel der Biometrik auf einige spezielle Probleme der Statistik eintreten und andererseits im speziellen dem Anthropologen und Zahnarzt über einige Beziehungen im Schädelbereich Auskunft geben.

Da die Statistik heute eine Wissenschaft darstellt, zu deren Verständnis eingehende mathematische Kenntnisse nötig sind, soll im folgenden dem mehr visuellen Bedürfnis des Mediziners dadurch Rechnung getragen werden, daß die statistischen Größen graphisch dargestellt werden. Da ich hierbei auf einige in dieser Theorie neue Zusammenhänge gestoßen bin, sollen diese noch speziell erörtert werden.

Im speziellen Teil sei dann auf ein zahnärztlich-orthopädisches Problem eingegangen. Um nämlich in Fällen von Dysgnathien mit eventueller Kieferkompression, bei denen eine protrudierte Front oder einzelne abnorme Zahnstellungen korrigiert und in einen günstigen Zahnbogen eingliedert werden sollen, eine entsprechende Therapie durchzuführen, stellen sich dem Zahnarzt vor allem zwei Fragen:

1. Reicht eine entsprechende Breiten-Dehnung der Kiefer aus, um den nötigen Raum zur Unterbringung aller vorhandenen Zähne zu einem geschlossenen Zahnbogen zu garantieren, und
2. Wie weit ist eine Dehnung überhaupt statthaft, ohne daß einerseits Recidive auftreten und anderseits eventuell Statik und Ästhetik des Gebisses in Frage gestellt werden?

Ohne eine nach solchen und anderen Gesichtspunkten vorhergehende Orientierung wird jede Therapie planlos und führt oft zu Mißerfolgen; denn, würde z.B. eine im Rahmen des Erlaubten ausgeführte Dehnung genügend Raum schaffen, so wäre statt dieser eine Extraktion von oft gesunden Zähnen, wie sie leider noch vielfach ausgeführt wird, geradezu kontraindiziert. Andererseits wäre es besonders bei einer Spätbehandlung unverantwortlich, auf gut Glück hin eine Dehnungstherapie zu beginnen, um schließlich nach längerer Behandlung festzustellen, daß der gewonnene Raum doch nicht ausreicht, um den gewünschten Zahnbogen herzustellen; zu spät muß dann noch zur Extraktion geschritten werden, mit dem Resultat, daß infolge zuviel Platzes ein minderwertiges Lückengebiß resultiert, oder die Behandlungsdauer verdoppelt werden muß.

Es geht hier also prinzipiell um die Frage: Gibt es im einzelnen Fall eine Größe, aus der eine entsprechende «normale» Zahnbogenbreite bestimmt werden könnte, die die Eingliederung der Zähne in einen funktionell und ästhetisch befriedigenden Zahnbogen gestattet und es zudem ermöglicht, abnorme Kieferbreitenmaße festzustellen? Um darauf eine Antwort zu geben, war es nötig, das Verhalten der verschiedenen Größen zueinander an vielen Fällen zu ermitteln, d.h. Messungen durchzuführen.

2. Untersuchtes Material

Um für diese biometrischen Untersuchungen ein von Zufälligkeiten weitgehend unbeeinflußtes Resultat zu erhalten, führte ich sehr viele Messungen aus. Ich konnte dann mit einer in solchen Untersuchungen üblichen Sicherheit feststellen, daß die gemessenen Werte normal, d.h. nach dem *Gaußschen* Fehlergesetz um einen Mittelwert verteilt sind.

Zuerst habe ich 100 geeignete, mazerierte, adulte Schädel von Europäern der Neuzeit untersucht, um vorerst von den Weichteilen unabhängige Werte zu erhalten, die somit auch anthropologisch verwertbar sind.

Dann erfolgten entsprechende Messungen an 1200 Personen: Je 100 Schüler vom 7.-17. Altersjahr, zur Hälfte Knaben und zur Hälfte Mädchen, sowie je 50 adulte Männer und Frauen (von 21-33 Jahren). Es wurden nur Fälle gemessen,

die keine sichtbaren Anomalien, wie offener Biß, Protrusionen, Zwangsbiß u.a. Stellungsanomalien besaßen, und im Oberkiefer lückenlosen Zahnbestand von I_1-M_1 aufweisen.

3. Durchgeführte Messungen

An den 100 mazerierten Schädeln sind folgende Messungen festgehalten:

1. *Frontzahnbreiten ΣI* : Der größte mesiodistale Kronendurchmesser der Schneidezähne des Oberkiefers, hier notiert als Summe der einzelnen Breiten. Ferner wurden separat die Eckzahnbreiten gemessen.
2. *Molarendistanz M_1* : Ich maß nur die sogenannte hintere Zahnbogenbreite des Oberkiefers, d. h. den Abstand der oberen 6-Jahr-Molaren, gemessen im tiefsten Punkt der vorderen Fissur.
3. *Zahnbogenbreite nach Izard: Zb*, gemessen im Oberkiefer an den am weitesten lateral stehenden Buccalflächen der Seitenzähne.
Diese 3 Größen sind leicht mit dem Gleitzirkel zu ermitteln.
4. *Zygionbreite zy-zy*: Größter transversaler Ausschlag der Jochbögen.
5. *Bitragialbreite t-t*: Am Schädel eigentl. Porionbreite: Das Porion ist der Punkt am Oberrand des Porus acust. ext., der senkrecht (in Beziehung zur Ohr-Augen-Ebene) über ihm steht.
6. *Hirnschädelbreite eu-eu*: Abstand der beiden eurya, d. h. der Punkte des Hirnschädels, die in der Horizontalen am weitesten lateral vorstehen.
7. *Schädellänge n-op*: Abstand vom nasion zum opisthocranion. Nasion = Punkt der sut. nasofront. in der Mediansagittalebene. Opisthocr. = am weitesten dorsal ausladender Punkt in der Mediansagittalebene.
8. *Kieferwinkelabstand go-go*: Abstand der Gonionpunkte. Diese liegen am Unterkiefer am weitesten kaudal, dorsal, lateral.
9. *Obergesichtsbreite fmt-fmt*: Hier habe ich die sehr leicht und eindeutig zu messende Distanz der Zygomatico-frontalis-Suturen an ihrem lateralsten Teil gemessen.

Alle Größen von 4 bis 10 sind mit dem Gleitzirkel zu messen, wobei für die zy-, eu-Breite und die Schädellänge vor allem darauf zu achten ist, daß genau waagrecht respektive in der Mediansagittalebene gemessen wird.

Nach Verwertung der Ergebnisse am mazerierten Schädel habe ich mich bei den lebenden Personen darauf beschränken können, die als günstige Bezugsgrößen zur Molarendistanz in Frage kommenden Maße, nämlich t-t, zy-zy und M_1 zu nehmen, unter jeweiliger Notierung von Namen, Geschlecht, Alter und Herkunft, sowie auffälliger Abnormitäten im Körperbau.

Die Bitragialbreite wurde gemessen an dem Ort, der als Schnittpunkt zweier zueinander Senkrechten resultiert, deren eine parallel zur OAE über dem Tragus, deren andere vor dem Tragus verläuft. Die Oliven dürfen nur leicht angelegt werden unter der Führung des Zeigefingers; auf dieselbe Art wird die größte Zygionbreite abgetastet.

Die Messungen sind auf den Millimeter genau ausgeführt worden, bei den Zahnbreiten auf den halben. Bei Zweifelsfällen ist stets auf den nächsten Millimeter aufgerundet, da ohnedies ein vorschriftsgemäßes Anlegen der Instrumente ganz ohne Druck nicht möglich ist.

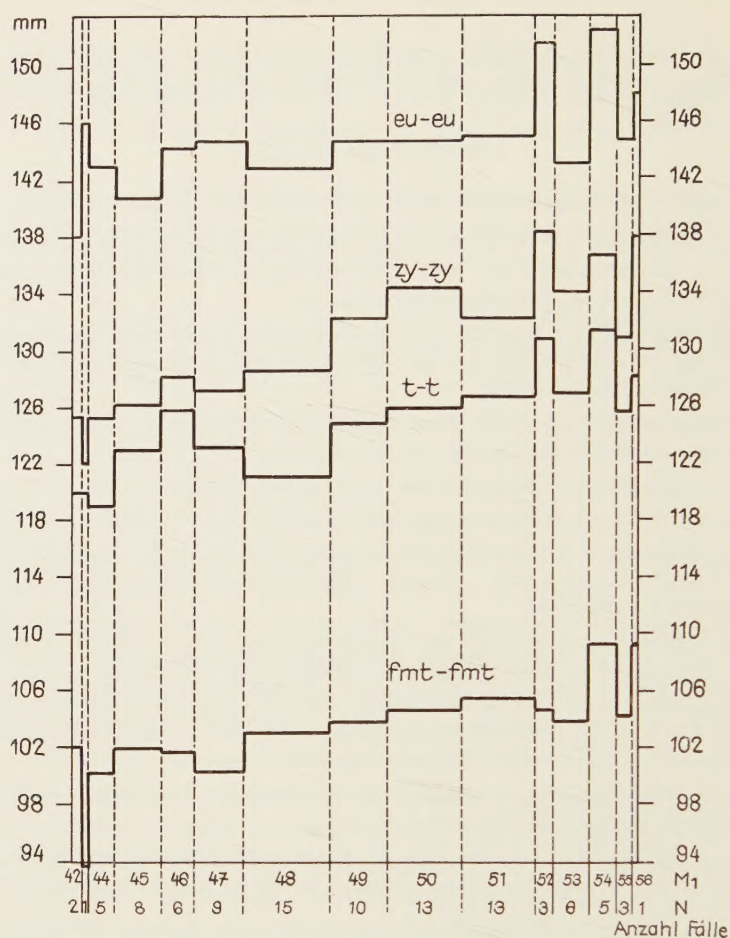


Abb. 1. Das Verhalten verschiedener Breitenmaße des Schädels bei steigender Molarendistanz, ermittelt an 100 mazerierten Schädeln.

4. Die Ergebnisse der 100 Schädelmessungen

Die Untersuchung ging also dahin, aus irgendwelchen Breitenmaßen des Kopfes auf die Molarendistanz schließen zu können. Von den 100 Schädeln waren mit Sicherheit 54 männliche und nur 7 weibliche identifizierbar, so daß ich den gesamten weiblichen Anteil auf etwa 12% schätze. Da es aber hier vorerst nicht auf die absolute Zahlengröße ankam, sondern nur auf deren relatives Verhalten zueinander, spielt der Geschlechtsunterschied keine Rolle.

Besser als eine tabellarische Zahlenangabe zeigt die graphische Darstellung (Abb. 1) das gegenseitige Verhalten der Größen. Bei

steigender Molarendistanz auf der Abszissenachse sind die entsprechenden Mittelwerte für die Tragion-, Zygion-, Euryon- und Obergesichtsbreite auf der Ordinate eingetragen. Gleichzeitig ist die Anzahl der gemessenen Fälle berücksichtigt, indem 1 mm auf der Abszissenachse zugleich 1 Fall bedeutet. Aus der Abb. 1 folgt:

1. In den oberen und unteren Extremwerten von M_1 zeigen die Kurven größere Schwankungen als Ausdruck der Ungenauigkeit der Mittelwerte infolge geringerer Anzahl Fälle.
2. eu-eu zeigt zu M_1 nur schwache gegenseitige Abhängigkeit. Eine noch kleinere Abhängigkeit ergab sich übrigens mit n-op, so daß der Längenbreitenindex (LBI) als Vergleichsgröße zu M_1 nicht in Frage kam.
3. fmt-fmt zeigt deutliche, aber schwache Korrelation zu M_1 .
4. zy-zy und t-t zeigen die beste Korrelation zu M_1 .

Ferner: die go-go korreliert nur sehr schlecht. Ergänzend sind in Tabelle 1 die Mittelwerte, die sich aus den Messungen der 100 Schädel ergeben haben, aufgeführt:

Tabelle 1.

M_1	zy-zy	t-t	eu-eu	n-op	LBI	Zb	go-go	ΣI	
49,0	131,0	124,8	145,0	174,0	84	63,3	98,8	29,0	mm

5. Methoden nach Izard, Pont und Berger

Im Bestreben, den für den einzelnen Fall normalen, d. h. brauchbaren Zahnbogen zu ermitteln, suchten *A. Gysi*, *Herber* und *Herbst* eine Lösung auf konstruktivem Wege zu erhalten. Sie gingen von der Größe und Lagebeziehung der Frontzähne aus. Diese Methoden sind zu kompliziert, um praktisch verwertet werden zu können, und außerdem sind bei gleichem Zahnbestand verschiedene Zahnbogenformen möglich, ohne daß Dysgnathien zu resultieren brauchen.

Auf biometrischem Wege bemühten sich *Izard*, *Pont* und *Berger*, eine entsprechende Norm für die einzelne Zahnbogenbreite zu finden.

So hat *G. Izard* einen Zahnbogenbreitenindex aufgestellt, nach dem die größte Zahnbogenbreite gleich der halben Jochbogenbreite sein soll (nach Verminderung um Weichteildicke).

$$\text{Izard: } \frac{zy-zy}{2} = Zb$$

Izard hat die Beziehung an Schädeln aller Rassen mit normaler Occlusion, aus dem Naturhistorischen Museum von Paris gefunden. Sie wird eigentlich kaum mehr verwendet, und ich glaube auch zugunsten anderer, viel eindeutigerer Beziehungen auf die *Izardsche* Relation verzichten zu können; in Fällen nämlich, wo der Zahnbogen mehr parabolioide Form hat, ist die größte Zahnbogenbreite durch M_3 oder

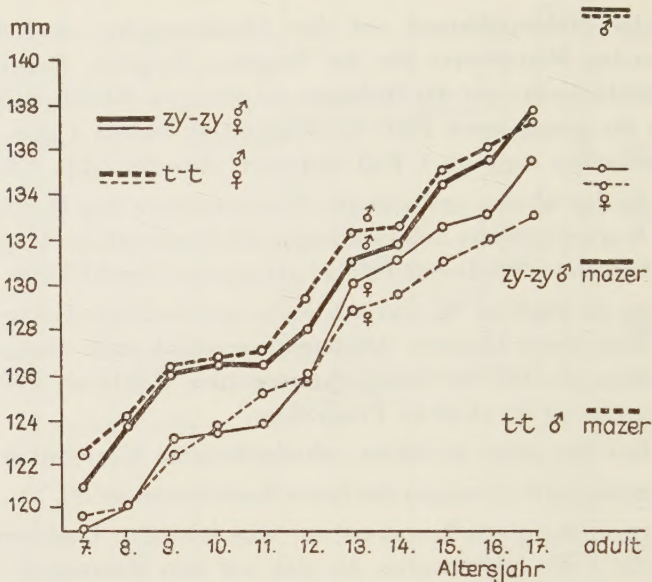


Abb. 2. Die Größenzunahme der Zygion- und Tragionbreite im Wachstum bei je 600 Personen beiden Geschlechtes.

M_2 gegeben. Da diese aber erst nach dem für Regulierungen günstigen Zeitpunkt durchbrechen und M_3 zudem oft zu weit buccal steht, könnte meist nur auf die Zahnbogenbreite bei M_1 abgestellt werden. Dort messen wir sie aber besser nach Pont oder Berger als Molarendistanz in der vorderen Fissur.

Nach A. Pont wird die Breite des Zahnbogens durch die Breite der Zähne bestimmt; er schließt von der Summe der größten Breite der oberen Schneidezähne auf die Molarendistanz.

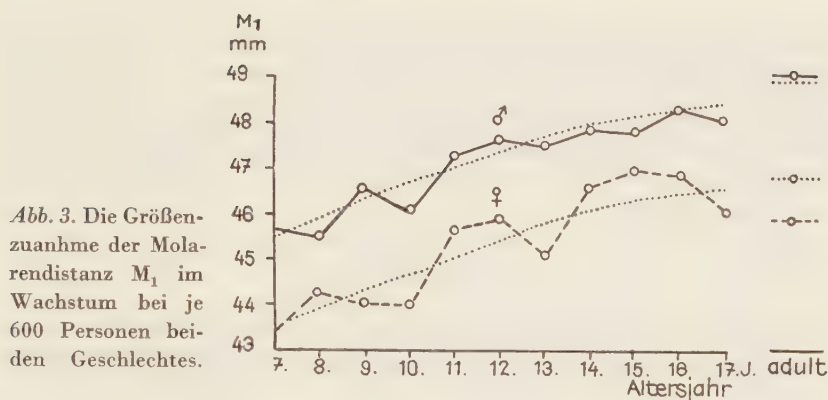
$$\text{Pont: } \frac{\Sigma I \cdot 100}{64} = M_1$$

Über die Brauchbarkeit dieser Methode sei in Kapitel 11 berichtet. Das Bergersche Relationsgesetz gilt nur für das lebende Individuum, weshalb es in Kapitel 7 besprochen wird.

6. Die Ergebnisse aus den 1200 Personenmessungen

Nach Abb. 2 erkennt man folgende Beeinflussung der zy- und t-Breite durch Alter und Geschlecht:

1. **Wachstumsabschluß:** Kiefer- und Gesichtsbreitenwachstum scheint beim Mann etwa im 20.-21. Jahr, bei der Frau schon im 18. Jahr aufzuhören, wie man durch Extrapolation über das 17. Jahr hinaus und in Übereinstimmung mit der Erfahrung erhält.



2. *Wachstumsgröße*: In der Wachstumsperiode vom 7. Jahr bis zum Adulten nehmen die Breiten bei Knaben um etwa 20 mm (von 122,5 auf 142) und bei Mädchen um 14,3 mm (von 120 auf 134,3) zu, was einem jährlichen Wachstum von zirka 1,5 mm bei ♂, 1,3 mm bei ♀ entspricht.
3. *Wachstumszunahme*: Die Kurve zeigt natürlich nicht geradlinigen Verlauf, sondern strebt gegen das erwachsene Alter hin asymptotisch dem höchsten Wert zu. Gegen das 9. und 13. Jahr hin scheint eine leicht vermehrte Wachstumszunahme zu bestehen (mit Ausnahme der weiblichen Tragionbreite). Es dürfte sich dabei um einen Wachstumsschub handeln, der auch in der gesamten Körpergröße und im Körpergewicht zum Ausdruck kommt, wie es in den Abb. 26 und 28 des Lehrbuches der Anthropologie von *Rud. Martin* ersichtlich ist. Dort scheint mir diese Vermutung eher erhärtbar, da sie aus Messungen mehrerer tausend Fälle resultiert.
4. *Geschlechtsunterschied*: Er ist bei der t-Breite ausgeprägter (♂ 3,5 mm größer als ♀) als bei der zy-Breite (♂ etwa 2 mm größer als ♀), und ist beim Adulten wegen des längeren Wachstums beim männlichen Geschlecht am größten (etwa 7 mm).

Viel flacher verlaufen die Wachstumskurven der männlichen und weiblichen Molarendistanz, wie Abb. 3 zeigt. Zu erahnen ist der asymptotische Verlauf der Kurve; aber auch die noch starken Mittelwertsschwankungen trotz der je 50 Messungen pro Altersjahr sind zu beachten! Sie zeigen einmal mehr, daß es sehr vieler Messungen bedarf, um eine glatte Kurve zu erhalten. Ich habe mir daher

erlaubt, die mutmaßlich aus genügend viel Messungen resultierende Kurve als geglättete Idealwertkurve punktiert einzuzichnen. – Die männliche Molarendistanz ist durchschnittlich 2 bis 2,5 mm größer als die weibliche. Sie nimmt um 3,5 respektive 3 mm vom 7. Altersjahr (mit 45,5 respektive 43,5) bis zum Adulten (mit 49 respektive 46,5 mm) zu.

7. Das Bergersche Gesetz

Eine Beziehung zwischen der Gesichtsbreite und der Molarendistanz hat *H. Berger* 1927 durch Messungen an 30 Personen mit Normalgebissen gefunden, und im Zygionalveolargesetz festgehalten. Es lautet für Erwachsene:

$$\text{Berger: } \frac{M_1 \cdot 100}{zy} = 33,3$$

d.h. die größte Jochbogenbreite sei dreimal so groß wie die Zahnbogenbreite an derjenigen Stelle, die unter dem vorderen Jochbogenansatz liegt. Für das Wachstumsalter hat *Berger* die Formel so modifiziert:

$$M_1 = \frac{zy + 1,5 (20 - \text{Alter})}{3}$$

Gemessen wird stets in der vorderen Fissur der oberen M_1 .

O. E. Meyer lehnt in seiner Dissertation 1929 die Brauchbarkeit eines solchen Gesetzes ab, da er einen Korrelations-Koeffizienten von nur $r = 0,1833 \pm 0,0667$ (d.h. mit relativ großem mittlerem Fehler) erhalten hat. Dies ist weiter nicht verwunderlich, wenn man weiß, daß *Meyer* sein Resultat, gewonnen an Kindern gemischten Alters, mit der *Bergerschen* Formel für Erwachsene vergleicht!

Auch die prinzipiellen Einwände von *P. Williams*, der 2 Individuen mit 2 differenten Gesichtsformen aber gleichem Zahnbogen fotografiert hat, sind bei Kenntnis des Verhaltens eines Kollektivs kein Argument gegen *Bergers* Gesetz, ebensowenig wie die von *G. Korkhaus*, der 2 Individuen mit gleichen Gesichtsmaßen, aber ganz differenten Zahnbogenbreiten beschreibt (zy-zy: 133 und 132; M_1 : 41 und 56,5). *Korkhaus* gibt als Grund dieses Verhaltens die verschiedenen Größen der Zahnkronen an und stellt die Behauptung auf, daß «nur soviel Platz und Alveolarfortsatz gebildet wird, als zur Aufnahme der sich im Kiefer entwickelnden Zähne nötig ist», was offenbar auch der Ansicht von *Pont* entspricht. Aber wieso kommt es denn zu primären Lückengebissen und wieso sind bei teilweiser oder totaler Anodontie die Kiefermaße doch noch annähernd normal?

Meiner Ansicht nach liegt die Ungenauigkeit der *Berger-Relation* in der ungenauen Festlegung und Differenzierung der Mittelwerte selbst, die wegen der relativ kleinen Zahl der von *Berger* untersuchten Personen erstens nicht nach Geschlecht getrennt, und zweitens ohne Rücksicht auf die zwar geringe, aber doch deutlich vorhandene Zunahme der Molarendistanz im Wachstum, ermittelt wurden. *Bergers* modifizierte Jochbogenbreite für Jugendliche basiert einzig auf der festgestellten Tatsache, daß die Jochbogenbreite im Jahr um 1,5 mm zunimmt. Die von *Berger* angegebene durchschnittliche Abweichung von 0,94 mm und «max.»

Variationsbreite von 6,0 mm sind sehr zufällig, da sie nur für seine 30 gemessenen Fälle Gültigkeit haben. Die Tabelle 2 zeigt, wieviel die nach der *Bergerschen* Formel aus 30 Fällen errechneten Werte für M_1 , von den meinen, an 1200 Messungen genommenen, abweichen. Jene geben nämlich bis 3,5 mm zu große respektive 3,7 mm zu kleine Mittelwerte, was bei einer Variationsbreite von 14 mm 25 % ausmacht!

Tabelle 2. Maximale Abweichungen der *Bergerschen* Sollwerte von den meinigen M_1 -Mittelwerten.

	für Knaben	für Mädchen	für Männer	für Frauen	
bei kleinsten zy-Breiten	+ 0,8	+ 2,1	— 3,5	— 2,8	mm
bei größten zy-Breiten	— 0,5	+ 3,7	— 0,8	— 1,1	mm

8. Über die Vorteile der Wahl der Bitragialbreite als Bezugsgröße

Bevor ich mich nun entschließen konnte, die *Bergersche* Formel nur auf Grund meiner genaueren Meßergebnisse abzuändern, suchte ich nach einer eventuell charakteristischeren Beziehungsgröße als es die zy-Breite darstellt. Dies scheint für die Bitragialbreite der Fall zu sein, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Die t-Breiten weichen um 20 % weniger von ihren Mittelwerten ab als die zy-Breiten. Dies geht schon aus dem Resultat hervor, das die durchschnittlichen Abweichungen (= arithmetisches Mittel aus den Mittelwertsabweichungen) zeigt. Sie ergab z. B. für 450 Messungen an Knaben vom 7.–15. Jahr folgende mittlere Gruppenwertsabweichungen:

für zy-Breite 3,3 mm,

für t-Breite 2,7 mm,

für die Größen an den mazerierten Schädeln:

für zy-Breite 4,2 mm,

für t-Breite nur 3,2 mm.

Die genaue statistische Streuung (Standard-Deviation) würde diesen Unterschied noch besser zeigen, doch ist das Resultat auch so gesichert, da schon für jedes Altersjahr getrennt betrachtet, die t-Breiten in allen diesen 10 Gruppen stets in ähnlichem Verhältnis geringer von ihren Mittelwerten abweichen als die zy-Breiten.

2. Unter den 1100 Knaben und Mädchen befanden sich 20 korpulente Typen. Von diesen 20 Fällen zeigten 19 eine größere

Abweichung der zy-Breite vom betreffenden Gruppenmittelwert als die t-Breite. Wie aus Tabelle 3 hervorgeht, ist bei Korpulenten die zy-Breite durchschnittlich um 8,5 mm, die t-Breite aber um nur 2,9 mm breiter als bei Nicht-Korpulenten. Die jeweiligen Abweichungen vom betreffenden Idealwert sind also für die t-Breite durchschnittlich 66% geringer. Dies hängt offenbar mit der Tatsache zusammen, daß sich am Tragion eine knorpelige Grundlage befindet, weshalb die Weichteildicke dort weniger von Fettgewebe durchsetzt werden kann als über dem Jochbogen.

Tabelle 3.

zy-zy	t-t	± Abweichung vom betreffenden Mittelwert	
		für zy-zy	für t-t
130	127	+ 7	+ 4
132	128	5	1
133	130	5,5	2,5
135	132	7,5	4,5
143	140	12	9
141	133	11	1
138	132	9,5	3,5
140	134	11	5
141	137	11	8
147	135	17	5
139	133	9	3
144	136	14	6
137	132	7	2
141	135	10	4
139	133	8	2
142	137	8,5	3,5
145	139	11,5	5,5
134	131	2	— 1 !
140	134	8	2
137	139	2,5 (<)	4,5 !!
		= 169:20 =	= 77:20 =
		im Mittel + 8,5 mm	+ 2,9 mm

3. Das Messen der Tragionbreite geht sehr leicht, eindeutig und schnell, da es sich um eine charakteristische Stelle handelt, während man bei der Zygionbreite die größte Ausladung erst abtasten muß.

4. Wie aus Abb. 2 hervorging, besteht beim Lebenden kein wesentlicher Unterschied zwischen der mittleren Bitragial- und

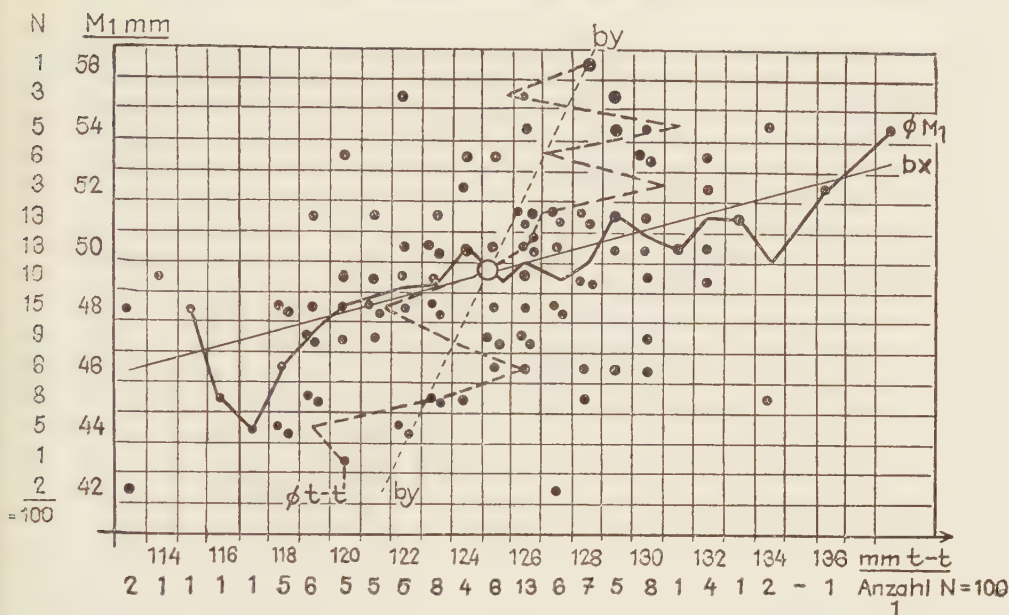


Abb. 4. Die Meßresultate der Tragonbreiten $t-t$ und der dazugehörigen Molarendistanzen M_1 der 100 mazerierten Schädel.

Zygionbreite, und nur am mazerierten Schädel ist erstere 6 mm geringer. Ferner ist nur gerade bei den Mädchen ab 13. Jahr die Zygionbreite bis 1,5 mm größer als die t -Breite, was eventuell auch auf vermehrtes Fettpolster hinweist. Es bliebe aber zu beweisen, ob diese Differenzen als statistisch gesichert aufzufassen sind.

9. Das statistische Problem der Abhängigkeit zweier Größen

Um nun die stochastische Abhängigkeit zwischen der Bitragialbreite (Merkmal x) und der Molarendistanz (Merkmal y) zu untersuchen, sind in graphischer Darstellung Abb. 4 vorerst die Meßresultate von den 100 mazerierten Schädeln festgehalten. Die stets auf ganze Millimeter ausgeführten Messungen sind der Anschaulichkeit halber in Einheitsquadrätchen pro 1 mm, die das ganze Koordinatensystem unterteilen, eingezeichnet. Die Mittelpunkte dieser Quadrätchen sind die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. So erhält man eine «Punktwolke», welche die Verteilung veranschaulicht.

Werden jetzt für jeden x -Wert (t -Breite) die Mittelwerte aus allen zugeordneten y -Werten (M_1 -Distanz) berechnet und als Punkte aufgetragen, so erhält man durch Verbinden dieser Punkte eine Mittelwertskurve (ϕM_1). Sie ist natürlich bei den kleinsten und größten x -Werten am unregelmäßigsten, da dort weniger Messungen vorliegen. Analog erhält man eine zweite Mittelwertskurve, wenn man die allen y -Werten zugeordneten Mittelwerte für x miteinander verbindet ($\phi t-t$).

Im idealsten Fall würden beide Mittelwertskurven zwei sich im Gesamtmittelwert schneidende Geraden darstellen. Daß in meinem Fall solche lineare Regression vorliegt, wurde von Dr. R. Conzelmann an einem Beispiel bewiesen. Diese sogenannten *Regressions-Geraden* b_x und b_y sind charakteristisch für stochastische Beziehungen auch anderer Art, wie z.B. für die Abhängigkeit zwischen Körpergewicht und Körpergröße, Atemvolumen und Brustumfang usw.

Die Steigung m_x (respektive m_y) der Regressions-Geraden b_x (respektive b_y) gibt also an, um wieviel y (respektive x) im Durchschnitt zunimmt, wenn x (respektive y) um 1 vermehrt wird.

Man berechnet die Steigung von b_x und b_y nach den Formeln:

$$m_x = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma^2} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$$

$$m_y = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}$$

N = Anzahl Fälle, $\bar{x}$, $\bar{y}$ = Durchschnitt, x_i = Einzelwert, Σ = Streuung (s. später)

So könnte man nun aus Abb. 4 eine Tabelle erstellen, die für jede Tragionbreite die dazugehörige mittlere Molarendistanz angibt, wobei man die Werte der Regressions-Geraden b_x benutzen müßte; will man aber umgekehrt für eine bestimmte Molarendistanz die dazugehörige mittlere Tragionbreite ablesen, so muß eine entsprechende 2. Tabelle aufgestellt werden, welche für jede M_1 die gesuchte t-Breite, die nun auf der Regressions-Geraden b_y abgelesen wurde, angibt. Es geht daraus hervor, daß irgendeine Tabelle, auf der man die Abhängigkeit zweier Größen ablesen kann, nur in der einen Richtung, für die sie errechnet wurde, Gültigkeit hat! Es geht z.B. aus Abb. 4 hervor:

zu 136 mm t-t gehört im Mittel eine M_1 -Distanz von 52 mm,
aber zu 52 mm M_1 gehört im Mittel eine t-t-Distanz von 126 mm.

Beim Versuch, die Verteilung meines Kollektives bildlich darzustellen, ließ sich die Vermutung bestätigen, daß sich die ganze «Punktwolke» im Idealfall ellipsenförmig gegen einen Mittelpunkt als Mittelwert verdichtet anordnet; d.h. die Verbindungslinien der Mittelpunkte aller Quadrätchen mit gleicher Häufigkeit (d.h. Anzahl Punkte im Innern) liegen im Idealfall auf (isonumerischen) Ellipsen. Idealfall bedeutet hier: *Gaußsche* Häufigkeitsverteilung mit 2 stetigen Parametern.

Praktisch läßt sich die Ellipsenform einer solchen Punktwolke leicht an einem größeren Material, wie es die 1200 Messungen darstellen, zeigen (Abb. 5. analog Abb. 4). In Abb. 5 sind die ursprünglich nach Alter und Geschlecht getrennten Verteilungsbilder in ihren Mittelpunkten übereinanderprojiziert eingetragen. Dadurch erkennt man alle 1200 Messungen als Abweichungen von einem Gesamtmittelwert 0. (Ein solches Übereinanderprojizieren ließ sich deshalb rechtfertigen, weil aus primär nach Alter und Geschlecht getrennten Untersuchungen hervorging, daß diese keine faßbaren Unterschiede in der Häufigkeitsverteilung und in der Steigung der Regressions-Geraden ergaben.)

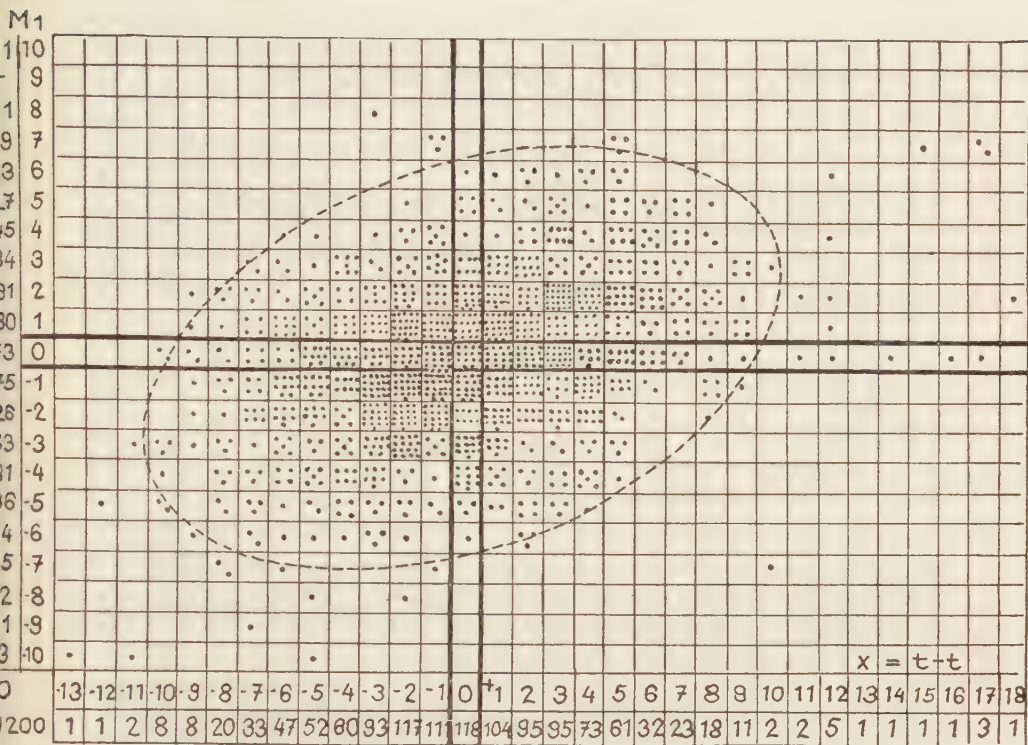


Abb. 5. Die Eintragung aller 1200 Messungen der Tragionbreiten $t-t$ und der jeweils dazugehörenden Molarendistanzen M_1 .

Mathematisch wurde die Gleichung einer solchen Ellipse von *H. Cramèr* (S. 287–290) wie folgt charakterisiert:

$$1. \quad \frac{x^2}{\mathfrak{S}_x^2} - \frac{2rxy}{\mathfrak{S}_x \cdot \mathfrak{S}_y} + \frac{y^2}{\mathfrak{S}_y^2} = c^2$$

c = Konstant, r = Korrelationskoeffizient, $\mathfrak{S}_{xy}$ = Streuung von x respektive y .

Die in Abb. 6 gezeichnete und für mein Kollektiv gültige Ellipse ist nur eine von unendlich vielen ähnlichen und ähnlich liegenden, die man durch Veränderung der Konstanten c erhält.

Besonders für den Nicht-Mathematiker ist es nun interessant, daß sich aus einer solchen Ellipse viele statistische Begriffe einfach ablesen lassen. Regressions-Gerade, Korrelationskoeffizient, Bestimmtheitsmaß, Streuung und Variationsbreite werden zu Begriffen, die einzeln und in ihren Zusammenhängen bildlich vorstellbar sind, was sich aus folgender Berechnung ergab:

Die Koordinaten der 4 Punkte H und T, in welchen die Ellipse (1) das ihr

verkleinert (z.B. $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{16}$), große aber vergrößert werden ($4 \rightarrow 16$). Auf der Verteilungskurve bildet sie den Wendepunkt vom konkaven zum konvexen Kurventeil.

$$\mathfrak{S}_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \Sigma(x_i - \bar{x})^2}$$

Der *Variations-Koeffizient* v_x, v_y , gibt nach *R. Martin* das prozentuale Verhältnis der Streuungen zum Durchschnittswert der betreffenden Größe an, und dient so zum Vergleich der Streuungen zweier verschieden großer Mittelwerte, wie sie sich beim Vergleich zweier Maße verschiedener Dimensionen ergeben. Es ist somit

$$v_x = \frac{100 \cdot \mathfrak{S}_x}{\bar{x}} \text{ ergibt für unser } \mathfrak{S}_x \text{ (nach Kapitel 12 = 4,0) ein } v_x = 2,8,$$

$$v_y = \frac{100 \cdot \mathfrak{S}_y}{\bar{y}} \text{ ergibt für unser } \mathfrak{S}_y \text{ (nach Kapitel 12 = 2,7) ein } v_y = 5,5.$$

d.h. die Streuung ist absolut gesehen für die *t*-Breite größer ($4,0 > 2,7$), relativ aber kleiner als die Streuung der Molarendistanz ($2,8 < 5,5$).

$$\text{II. } AT:AB = CH:CB = r$$

Das *Verhältnis der Abszissen (oder umgekehrtes Verhältnis der Ordinaten) des höchsten und des am meisten rechts gelegenen Ellipsenpunktes ist gleich dem Korrelationskoeffizienten r* , d.h. wenn man die Strecke BA beziehungsweise BC als Einheit wählt, so ist der Schnittpunkt mit der Regressions-Geraden b_x respektive b_y direkt als r abzulesen (in Abb. 5 ist $r = 0,37$).

Der *Korrelationskoeffizient r* gibt ein Maß für die Abhängigkeit der Regressions-Geraden b_x zu b_y . Er liegt zwischen $+1$ und -1 . $r = +1$ wäre maximale Korrelation, d.h. b_x und b_y fallen zusammen und gehen durch den Tangenten-Schnittpunkt B, und die Ellipse degeneriert zu einer Strecke. $r = 0$ bedeutet, daß keine Abhängigkeit zwischen der Größe x und y besteht, d.h. b_x bzw. b_y fallen mit der x - bzw. y -Achse zusammen und es resultiert eine Ellipse (oder ein Kreis) mit horizontal und vertikal gerichteten Achsen. In der Biologie ist wegen der starken Streuung nie ein Korrelationskoeffizient über $0,8-0,9$ zu erwarten. Es ist:

$$r = \sqrt{b_x \cdot b_y} \left(= \sqrt{B} \right) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \cdot \Sigma(y_i - \bar{y})^2}}$$

$$\text{III. } (x_H \cdot y_T) : (x_T \cdot y_H) = r^2 : 1$$

(r^2 ist das sogenannte Bestimmtheitsmaß. $B \cdot r^2 = b_x \cdot b_y$ und geht von 1 bis 0). Das *Flächenverhältnis der ähnlichen Rechtecke OEFD und OABC ist gleich r^2* . Das *Verhältnis des kleinen zum großen Rechteck veranschaulicht also, mit wieviel Prozent Wahrscheinlichkeit eine Veränderung der einen Größe aus der Veränderung der andern erklärt werden kann*. Zum Beispiel: $r^2 = 0,12$ heißt, daß sich 12% der Streuung der einen aus der Veränderung der andern Größe durch lineare Regression erkennen läßt.

Vollständigkeitshalber sei noch ein weiterer Begriff vorweggenommen:

$$\text{IV. Die Variationsbreite } \pm V_x \text{ und } \pm V_y$$

Sie gibt den Abstand des jeweils gefundenen größten respektive kleinsten Wertes

vom Mittelwert an. Sie ist stark zufällig und hängt ab von der Anzahl der Messungen und kann theoretisch unendlich groß sein. Deshalb möchte ich stets eine «spezielle $\pm$ Variationsbreite» für eine bestimmte Anzahl Prozent der Fälle, für welche sie im Idealfall Gültigkeit hat, angeben. Die spezielle Variationsbreite entspricht jeweils einer bestimmten Anzahl mal $\mathfrak{S}$, so daß man sie anhand der Normalverteilungstabelle *A. Linder* für jedes $\mathfrak{S}$ ermitteln kann. (Spez. V. = $\mathfrak{S}$. Ind. P. 100-Ind. P. = Prozent.)

Für unser Kollektiv ergab sich z. B. für:

99 % aller t-t resp. M_1 :	V_x spez. = 10,4	resp. V_y spez. = 7
98 % » » » » :	» = 9,3	» » = 6,3
95 % » » » » :	» = 7,8	» » = 5,3
68 % » » » » :	» = 4,0 = $\mathfrak{S}_x$	» » = 2,7 = $\mathfrak{S}_y$

Der Umfang der Ellipse in Abb. 5, 6 und 7 ist für ein V spez. 99 % eingezeichnet, d. h. BC = 10,4 (= V_x spez. für t-t) resp. BA = 7 (= V_y spez. für M_1).

V_{xy} 99 % umfaßt übrigens ungefähr das, was man in der Biologie als noch innerhalb der Norm liegend bezeichnet, womit man alle Größen versteht, die nicht mehr als zweimal $\mathfrak{S}$ vom Mittelwert abweichen. Dabei ist aber nicht gesagt, daß außerhalb dieses Bereiches liegende Fälle pathologisch oder abnorm sind, da sie ja alle als Extremwerte im Bereiche der statistischen Variabilität liegen können. Erst wenn z. B. zwei miteinander in Beziehung stehende Größen, wie die Molarendistanz und die Zahnbreite, in entgegengesetztem Sinne stark variiert vorliegen, so daß eventuell sehr breite Zähne mit sehr schmalem Kiefer zusammentreffen, resultiert daraus eine pathologische Raumnot mit Dysgnathien.

10. Die Beziehung der Bitragnalbreite zur Molarendistanz

Die nun folgenden Ergebnisse resultierten aus der statistischen Auswertung der 1200 Messungen. Unter den zuerst nach Alter und Geschlecht getrennt errechneten Werten für m_x und m_y war es möglich, runde Durchschnittswerte herauszugreifen, die von den effektiven maximal um $\pm 0,07$ für Steigung b_x respektive 0,04 für b_y abweichen und die für jedes Alter und Geschlecht verwendet werden können.

$$m_x (M_1) = 0,25$$

$$m_y (t-t) = 0,55$$

$$B (r^2) = 0,125$$

$$r = 0,37 \pm 0,025 \text{ als Fehler (nach Martin } = \frac{1-r^2}{\sqrt{N}})$$

$$x (t-t) = 4,0 \quad v_x = 2,9$$

$$y (M_1) = 2,7 \quad v_y = 5,6$$

d. h. M_1 relativ variabler als t-t!

$$V_x 99 \% = \pm 10,4$$

$$V_y 99 \% = \pm 7,0$$

Auf Grund dieser Angaben ist die Ellipse in Abb. 6 gezeichnet.

Vergleichsweise sei noch der von *O.E. Meyer* erhaltene Korrelations-Koeffizient für die Beziehung $zy-zy$ zu M_1 angeführt: $r = +0,1833 \pm 0,0667$.

Nach diesen Ergebnissen und den früher in Abb. 2 angegebenen Mittelwerten war es nun möglich unter Berücksichtigung von Alter und Geschlecht Formeln aufzustellen, die von einer gegebenen Tragionbreite auf die durchschnittliche Molarendistanz schließen lassen. Die nach diesen Formeln berechneten Werte der Molarendistanz weichen maximal $\pm 0,2$ mm von den als ideal angenommenen und ± 1 mm von den effektiv erhaltenen Mittelwerten für jedes Alter und Geschlecht ab. Die Aufstellung der Formel wurde dadurch wesentlich einfacher, daß die Steigung der Regressions-Geraden b_x ziemlich genau mit der Wachstumskurve für M_1 vom 7.-14. Jahr zusammenfällt (vgl. Abb. 8). Damit ergab sich für das Regulationsalter eine relativ einfache Formel. Sie lautet:

$$\begin{array}{lcl} \text{♂ } \varnothing M_1 \text{ soll (7.-14. Jahr)} & = & \frac{t-t}{4} + \begin{array}{l} 15 \text{ ♂} \\ 13,5 \text{ ♀} \end{array} \\ \text{(= Regulationsalter)} & & \end{array}$$

$$\text{♂ } M_1 \text{ soll (15.-21. Jahr [ad.])} = \frac{t-t}{4} + 13,5 + 0,2 \times (21 \text{ minus Alter})$$

$$\text{♀ } M_1 \text{ soll (15.-18. Jahr [ad.])} = \frac{t-t}{4} + 13,2 + 0,2 \times (18 \text{ minus Alter})$$

Dabei könnte die Molarendistanz durch individuelle Meßfehler der Tragionbreite von höchstens ± 3 mm, maximal um $\frac{3}{4}$ mm falsch bestimmt werden. Dadurch ergaben sich mit diesen Formeln im ungünstigsten Fall um 7% falsche Molarendistanzen (in bezug auf ihre Variationsbreite) gegenüber 30% nach der *Berger*-Relation. Die Formeln sind natürlich nur in der aufgestellten Richtung verwendbar. Wollte man von der Molarendistanz auf die Tragionbreite schließen, so würden sie z.B. für das 7.-14. Jahr lauten:

$$t-t \text{ soll (7.-14. Jahr)} = 0,55 \cdot M_1 + 1,3 (J.-7) + 97,5$$

In Abb. 7 ist mit den Angaben der betreffenden Mittelwerte für $t-t$ und M_1 veranschaulicht, wie weit Geschlecht und Alter diese verändern. Man denke sich für jedes Alter die entsprechende Ellipse, wie sie im adulten eingezeichnet ist. Tabelle 6 gibt zu Abb. 7 gehörende ausgeglichene Mittelwerte von $t-t$, $zy-zy$, M_1 für jedes Alter und für je beide Geschlechter an:

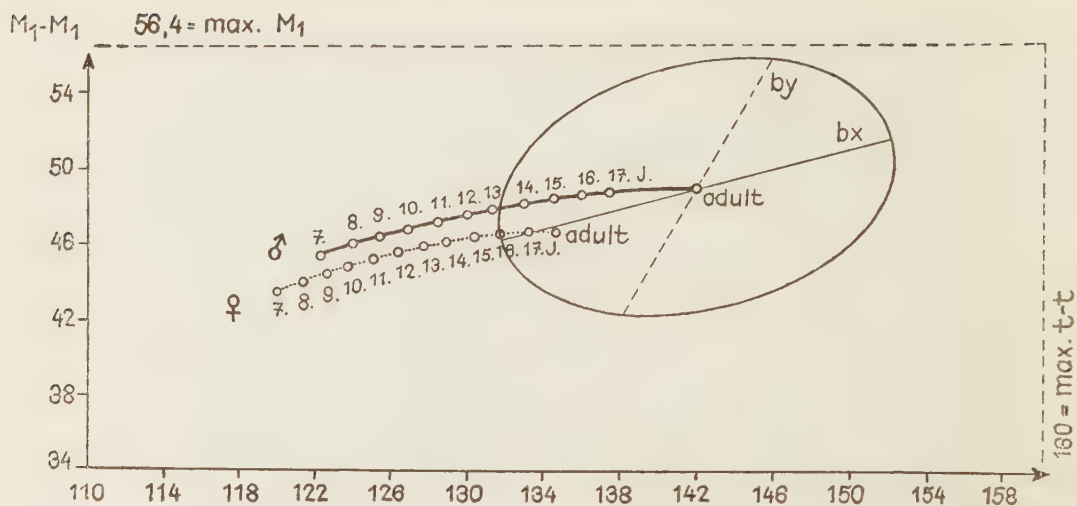


Tabelle 6 (zu Abb. 7).

Altersjahr	t-t $\pm 10,4$		Ideale Mittelwerte für zy-zy $\pm 10,4$		$M_1 \pm 7$	
	♂	♀	♂	♀	♂	♀
7.	122,5	120	121,5	120	45,5	43,5
8.	124	121,3	123,1	121,3	45,9	43,9
9.	125,5	122,6	124,7	122,6	46,3	44,3
10.	127	123,9	126,3	123,9	46,7	44,7
11.	128,5	125,2	127,9	125,2	47,1	45,1
12.	130	126,5	129,5	126,6	47,5	45,5
13.	131,5	127,8	131,1	128	47,8	45,8
14.	133	129,1	132,7	129,4	48,1	46,1
15.	134,5	130,4	134,3	130,8	48,3	46,3
16.	136	131,7	135,9	132,2	48,5	46,5
17.	137,5	133	137,5	133,6	48,7	46,7
adult	142	134,3	142	135,1	49	46,8

11. Die Pontsche Methode und ihre Fehler

Wie in Kapitel 5 erwähnt, soll nach der Pontschen Formel die mit 100 multiplizierte Summe der Breite der oberen Schneidezähne dividiert durch 64 gleich der im Durchschnitt dazugehörenden Molarendistanz sein. Pont hat sein Ergebnis aus Messungen an 49 Schädeln von Südfranzosen berechnet. Linder und

Harth korrigierten die Formel dahin, daß sie statt durch 64 durch 65 dividierten. Die damit aufgestellte, heute allgemein übliche Tabelle lautet:

Tabelle 5.

Summe I	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	mm
M_1-M_1	41,5	43	44,5	46	47,5	49	51	52,5	54	55,5	mm

Durch diese Korrektur mögen *Linder* und *Harth* für Mitteleuropäer geeignetere Mittelwerte erhalten haben. Aber trotzdem mußten an ihnen stets bestimmte Einschränkungen gemacht werden, weil die Werte *Ponts* wegen der relativ flach verlaufenden Zahnbogen seiner mediterranen Breitgesichter zu hoch seien, so daß bis 2 mm Abzüge gemacht werden müßten. Ferner hat das Experiment *Williams* gezeigt, daß trotz Vorhandenseins gleich breiter Zähne verschiedene Zahnbogenformen möglich sind: ellipsoide, paraboloide oder mehr kreisähnliche. Bei Flachfront können wegen geringerer Zahnbogenhöhe die 6-Jahrmolaren auf dem Zahnbogen weiter mesial stehen – an einer Stelle also, wo wegen der Konvergenz desselben nach vorn die Kieferbreite kleiner ist – weshalb dann die *Pont*-Soll-Werte zu groß würden.

Es wurde zwar stets darauf hingewiesen, daß die *Pont*-werte im mittleren Bereich noch gut mit der Wirklichkeit übereinstimmen, und «nur» im kleineren und größeren Streubereich Abzüge respektive Zugaben zu machen seien. Es ist klar, daß dem Praktiker mit einer Methode, die nur im mittleren Bereich Gültigkeit hat, nicht geholfen ist, da er eben vorwiegend an Gebissen mit abnormen Maßen Therapie treiben muß. Die Unzulänglichkeit der *Ponts*-chen Methode ist vor allem darauf zurückzuführen, daß die Messungen *Ponts* statistisch nicht einwandfrei ausgewertet worden sind. Die aus der Formel ersichtliche Gerade entspricht nämlich keiner der beiden möglichen Regressionsgeraden b_x und b_y ! Vielmehr scheint *Pont* eine Gerade gewählt zu haben, die zwischen beiden liegt, was schon daraus hervorgeht, daß sowohl die extremsten Variationswerte für M_1 wie für ΣI in der Tabelle erfaßt werden (41,5–55,5; 27–36). Dies wäre nur möglich bei einem Korrelations-Koeffizient $r = 1$, den es in der Biologie nicht gibt. Dadurch aber, daß an Stelle von 2 Geraden nur eine (eventuell gemittelte) Gerade benützt wird, kann man die Formel zwar auch rückläufig anwenden, aber es kann nie von dem Wert der einen Größe auf den richtigen Mittelwert der anderen geschlossen werden, außer eben im Gesamtmittelwert 0. So kommt es, daß für breite Schneidezähne die Mittelwerte für die Molarendistanz bis 3,6 mm zu groß, für schmale bis 5,7 mm zu klein werden.

Eine weitere Ungenauigkeit entsteht dadurch, daß *Pont* weder Geschlechtsunterschiede noch Altersunterschiede im Wachstum gemacht hat. Wie die Molarendistanz sich verändert, wurde im vorigen Kapitel beschrieben. Aber auch die Zahnbreiten zeigen Geschlechtsunterschiede. Da ich aus technischen Gründen die Zahnbreiten nur an 50 mazerierten Schädeln gemessen habe, beziehe ich mich auf die von *L. J. Radeff* angegebenen Werte, die er in seiner Dissertation 1925 veröffentlicht hat. Er hat bei nur kompletten Gebissen von je 100 Bulgaren und Bulgarinnen alle Zahnbreiten gemessen, sowie Alter und Geschlecht und Statur der Patienten notiert. Es ergaben sich im Durchschnitt folgende Zahnbreiten:

Tabelle 7.

Zähne:		I ₁	I ₂	C	P ₁	P ₂	M ₁	M ₂	M ₃	
Oberkiefer	♂	9,01	6,96	8,07	6,85	6,98	9,84	9,23	7,77	mm
	♀	8,46	6,7	7,72	6,69	6,79	9,68	9,12	7,7	mm
Unterkiefer	♂	5,56	6,66	7,09	6,82	7,06	10,96	10,12	9,85	mm
	♀	5,44	6,39	6,53	6,64	6,87	10,64	9,88	9,66	mm

Somit ist nach *L. J. Radeff* (200 Messungen) $\Sigma I = \text{♂:} 31,94 \text{ ♀:} 30,38$
Nach *O. E. Meyer* (93 Messungen) worunter 84 % weibliche 30,25
Meine 50 mazerierten Schädel (etwa 12 % weiblich) 29,00

Ich betrachte meine 50 Zahnbreitenmessungen als zu gering, um allgemein gültig zu sein, und *Radeffs* Werte sind für Mitteleuropäer eher etwas zu groß, was auch aus *Meyers* Werten ersichtlich wird. Wir nehmen schätzungsweise die durchschnittliche ♂ $\Sigma I = 31,5$, durchschnittliche ♀ $\Sigma I = 30$ an. Mit der eher etwas zu guten Regressions-Geraden von $b_x = 0,4$ (effektiv am Schädel 0,388) und unter Berücksichtigung der Alters- und Geschlechts-Variation der Molarendistanz (laut 1200 Messungen) ergab sich nun folgende neue Beziehung der Frontzahnbreite zur Molarendistanz:

$M_1 \text{ soll (für Kinder) } =$	$\frac{\Sigma I}{2,5} + 0,4 (J.-7) +$	$\frac{32,9}{31,5} \begin{matrix} \text{♂} \\ \text{♀} \end{matrix}$
$M_1 \text{ soll (für Adulte) } =$	$\frac{\Sigma I}{2,5} + \frac{36,4}{34,8} \begin{matrix} \text{♂} \\ \text{♀} \end{matrix}$	

12. Zur Wahl der geeigneten Bezugsgröße für die Molarendistanz

Diese kann nicht allein durch Vergleich verschiedener Streuungen getroffen werden, da solche nur über die Verteilungsdichte der Masse, nicht aber über die Abhängigkeit zweier Größen Auskunft gibt. Dazu ist nur der Korrelations-Koeffizient r brauchbar. Wäre z. B. für die Beziehung ΣI zu M_1 wie für $t-t$ zu M_1 der Korrelations-Koeffizient gleich groß, so müßte derjenigen Größe der Vorzug gegeben werden, die den absolut kleineren Variations-Koeffizienten besäße, oder, wenn auch dieser gleich wäre, würde man sich an die praktisch leichter meßbare Größe halten. Wären aber alle Bedingungen gleich, so spielte es absolut keine Rolle, ob von der Zahnbreite oder von der Tragionbreite auf die Molarendistanz geschlossen würde, da man ja dann im Einzelfall vom Ausmaß der einen Bezugsgröße nur mit der bestimmten, genau gleich großen Wahrscheinlichkeit auf den betreffenden Mittelwert der anderen Bezugsgröße folgern könnte.

Wie sich nun hier die Werte effektiv ergeben, konnte ich an 40 der mazerierten Schädel ermitteln; der Vergleich der Beziehungen $t-t$ zu M_1 und ΣI zu M_1 ist in Tabelle 8 gegeben:

Tabelle 8

t-t : M ₁		$\Sigma I : M_1$
m _x	0,27	0,39
m _y	0,44	0,15
r ² (B)	0,119 = 11,9 %	0,057 = 5,7 %
r	0,35 ± 0,12	0,24 ± 0,15
M ₁	3,8	3,8
t-t	4,9	$\ominus_{\Sigma I} = 2,4$

$v_{M_1} = 7,9$
 $v_{\Sigma I} = 8,2!$
 $v_{t-t} = 2,9$

Wie sich bei der Prüfung mit der sogenannten F-Verteilung von *R. A. Fisher* ergibt, ist der Variations-Koeffizient v_{t-t} signifikant kleiner als der Variations-Koeffizient $v_{\Sigma I}$.

Die individuell möglichen Meßfehler dürften für beide Größen prozentual gleich sein, so daß ich zum Schluß komme, daß es besser sei, von der Tragionbreite als von der Schneidezahnbreite auf die Molarendistanz zu schließen (nach den Formeln in Kapitel 12).

Dank meines großen und statistisch besser ausgewerteten Kollektivs, ergab sich wohl eine eindeutigere Korrelation der verschiedenen Größen, aber es wird doch noch stets dabei bleiben müssen, daß die gefundenen Beziehungen nur zur allgemeinen Orientierung über die mutmaßlich passende Molarendistanz dienen können. Man könnte also höchstens fordern, daß bei einer Kieferdehnung darauf geachtet wird, daß die Molarendistanz maximal um etwa ± 3 mm vom Sollwert nach der entsprechenden Formel (z. B. Tragion-Alveolarformel) abweichen darf.

Ist es jedoch erwünscht, in jedem einzelnen Fall die Zahnbogenbreite, die nötig ist, um bei dem vorliegenden Zahnbestand einen günstigen Bogen herzustellen, zu bestimmen, so kann man nach einer besonderen Methode vorgehen. Ich habe eigens zu diesem Zweck ein Verfahren entwickelt, das die Herstellung von speziellen Abdruckmodellen erlaubt, an denen jede gewünschte Zahnbewegung und Kieferdehnung ausgeführt, gemessen, beurteilt und eventuell demonstriert werden kann. Die Herstellung solcher Gipsmodelle benötigt keinerlei Spezialapparate und kann von jedem Zahnarzt oder Techniker in 20–30 Minuten erfolgen. Sollte die Praxis die Brauchbarkeit dieser Methode beweisen, so würde sich die einzuschlagende orthopädische Therapie etwa aus folgendem ergeben:

Zuerst müßte die Möglichkeit einer erfolgreichen Dehnung anhand allgemein bekannter orthopädischer Gesichtspunkte, wie

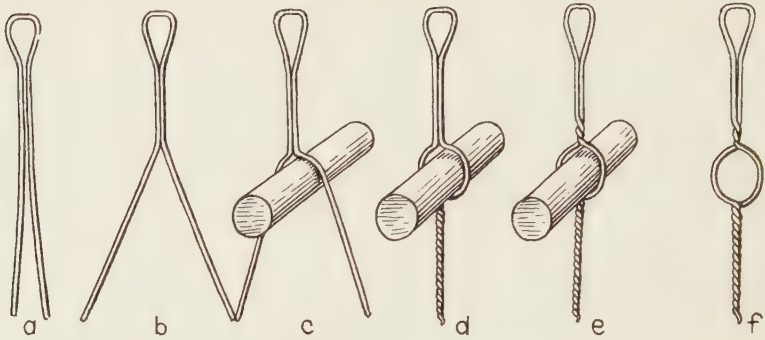


Abb. 8. Herstellung der Zahnhalter.

günstige breite apikale Basis, Alter und Allgemeinzustand des Patienten und seiner Zähne geprüft werden. Dann messe man zuerst die Tragionbreite und errechne für sie nach Formel den Sollwert der Molarendistanz. Am Spezialmodell wird die zur Zahnbogenkorrektur nötige Dehnung ausgeführt und die so erhaltene Molarendistanz mit der Solldistanz verglichen: Überschreitet sie ± 3 mm, so wäre an Stelle der Dehnung eine Extraktionstherapie indiziert.

13. Die Herstellung der speziellen Abdruckmodelle

1. Material:

- 1 Flachzange
- 1 Wachsspatel
- 2 Wachsplatten $\varnothing$ 0,5 mm
- 1 rundes Stäbchen $\varnothing$ 5 mm (z. B. Orangenholz)
- 4 Messingdrähte 8,5 cm lang, 0,5 mm $\varnothing$
- 1 harter, rostfreier Draht, 9 cm lang, 2 mm $\varnothing$
- Hartgips

2. Geschiebe und Zahnhalter (man fertige sie auf Vorrat an):

Die Messingdrähte werden von Hand laut Abb. 8 unter Zuhilfenahme des Orangenhölzchens vorgedreht. Mit der Zange werden sie dann nachgezogen bis sie fest am Hölzchen sitzen, von diesem abgezogen und gerade gedrückt. So erhält man die Zahnhalter (Abb. 8 natürliche Größe). Aus dem 9 cm langen Draht biege man eine U-Schleufe mit 2 parallelen Schenkeln, die vorn abgerundet die Ausmaße nach Abb. 9 aufweisen.

3. Der Abdruck: Es soll ein guter Kolloidabdruck (am besten aus Coeloid) vorliegen. Ein gewöhnliches Übersichts- oder Arbeitsmodell kann davon zuerst ausgegossen werden, wenn man dieses sorgfältig abnimmt unter Schonung des Abdruckes (Abb. 10).

4. Vorbereitung des Abdrucks zum Ausgießen:

Zuerst schneide man im Frontbereich die Kolloidmasse bis auf den Löffelrand und um diesen herum weg. Dann stopfe man Hartgips in Pastenkonsistenz (!) einzeln

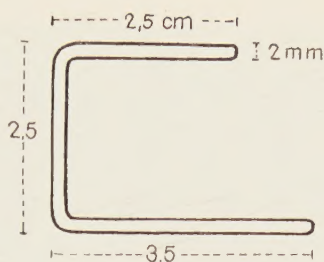


Abb. 9. Die Herstellung der U-Schleife für die speziellen orthodontischen Modelle.

in diejenigen Zähne, die frei beweglich werden sollen, was meist für die 4 Frontzähne zutrifft. Zeigen die Zähne einen Engstand, so soll der Gips über die interdentalen Septen des Kolloids hinweg, in dünner Schicht die Frontzähne miteinander verbinden. Bei lückiger Front sollen die einzelnen Zahnfächer getrennt mit Gips ausgefüllt werden; nun stecke man sofort die Zahnhalter mit der Zahnschleife voran so in den Gips der einzelnen Zahnfächer, daß sie ungefähr die vermutliche Richtung der Zahnwurzeln annehmen und ihre Schlinge der Stellung des betreffenden Zahnes parallel läuft. Mit einem Riffelinstrument vibriert man den Abdruck kurz, füllt eventuell noch Gips nach und läßt den Gips erhärten (Abb. 11). Nachdem man dann die Halteteile der Zahnhalter vorsichtig ein wenig parallelisiert und zuvorderst im Abdruck die Mitte im Kolloid markiert hat, drückt man eine leicht vorgeformte, warme Wachsplatte 0,5 mm über die Halteteile durch bis zu den Schlingen. Nun verwachse man sie ohne Zug vorn am freien Löffelteil und schneide sie dann mit heißem Spatel so zurecht, daß sie auf der Höhe der Eckzähne auf den Abdruck rechtwinklig umgebogen, diesen in einen vorderen gedeckten und einen hinteren offenen Teil trennt. Die Trennung muß mesial vom einen Eckzahn zum anderen erfolgen, wobei besonders darauf zu achten ist, daß kein Wachs in die Eckzähne fließt. Man verwachse alle Lücken, wobei es keine Rolle spielt, daß das Wachs auf der Kolloidmasse nur aufliegt ohne zu kleben (Abb. 12).

Nun schneide man eine weitere Wachsplatte ungefähr so zurecht, daß sie in den median vom Kolloid hineingeschnittenen Schnitt hineingestoßen und vorn über der horizontalen Wachsplatte überall so mit ihr verwachst werden kann, daß sie den ganzen Abdruck hermetisch in eine rechte und linke Hälfte teilt (Abb. 13).

Schließlich stecke man die U-Schleife, deren Schenkel man vorher leicht einvaselinert hat, so in den Abdruck, daß ihr längerer Schenkel auf Höhe der Mitte der hintersten Molaren gaumenwärts etwas durch die mediane Kolloidmasse durchgestoßen wird, und ihr vorderer Schenkel durch die horizontale Wachsplatte auf Höhe der Halteteile der Zahnhalter durchstößt. Man stoße die U-Schleife nur so weit, daß ihre Schenkelenden die Zahnreihe seitwärts nicht überragen.

Jetzt schneidet man mit heißem Wachsspatel die horizontale Wachsplatte etwa $\frac{1}{2}$ cm über den höchsten Metallteilen horizontal durch. An verschiedenen Stellen versehe man sie mit zirka 1 cm langen, 1–2 mm breiten, senkrechten Schlitten. (Dadurch wird durch direkten Kontakt beider Abdruckhälften die durch das Wachs entstandene Lücke kompensiert, die Lage in Schlußstellung stabilisiert und eine genaue Messung der Dehnung an der Schlitzstelle ermöglicht.) Jetzt kann der Abdruck wie üblich auf einmal ausgegossen werden (Abb. 14).

Das erhärtete Modell wird vorsichtig vom Abdruck abgehoben, beschliffen

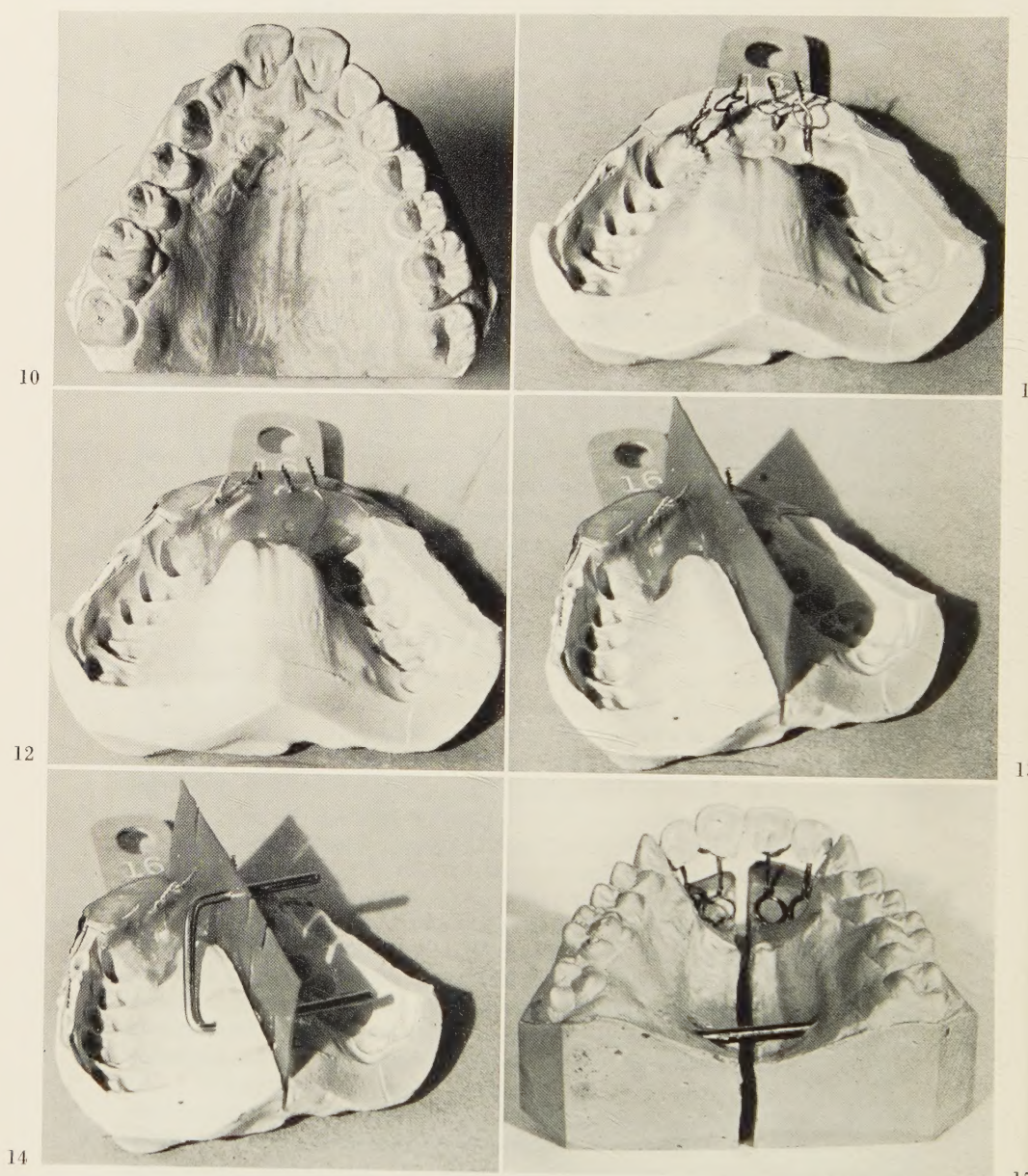


Abb. 10-15

und vom Wachs befreit. Durch vorsichtiges Hebeln mit einem Spatel wird der Abdruck gespalten. Eventuell miteinander vergipste Frontzähne werden vorerst gebrochen und wenn nötig, wird überschüssiger Gips entfernt. (Es ist aber wichtig,

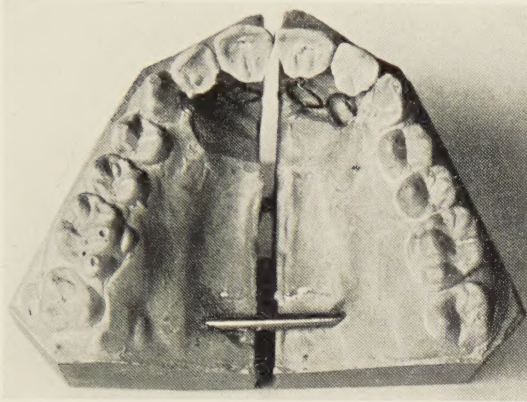


Abb. 16.

darauf zu achten, daß überall die ganze Zahnbreite erhalten bleibt!) Man kann nun das Modell auseinandernehmen. Um ein leichtes Verschieben der beiden Teile zu ermöglichen, wird es nötig sein, in der ersten Zeit die Schenkel der U-Schlaufe einige Male gut einzufetten.

Am fertigen Modell können nun die einzeln aufgehängten Zähne, die vorerst in natürlicher Stellung stehen, um jede beliebige Achse gedreht, gekippt und dank der Schlinge verlängert oder verkürzt werden. Man formt aus ihnen den gewünschten Frontzahnbogen unter Kontrolle des Bisses mit dem Unterkiefermodelle und kann so die erstrebte Korrektur bezüglich Dehnung, Bißhöhe und Bißlage ermes sen und beurteilen. Natürlich muß man sich vorgehend am Patienten über die Beziehung der Kiefer zueinander und zum Profil genau orientieren. Die Abb. 15 und 16 zeigt das Modell aus Abb. 11 in gedehntem Zustand mit retrudierten Frontzähnen.

Spezialfälle:

1. Sollen auch einzelne Zähne oder Gruppen von 3–7 separat bewegt werden, so muß man sie ebenfalls einzeln ausgießen und separiert mit Zahnhalter verbinden.
2. Auch das Unterkiefermodell kann dehnbar gemacht oder gar mit einzeln beweglichen Zähnen hergestellt werden.
3. Bei Y-Dehnung bleibt die Methode die gleiche, da es ja am Modell nur auf ein relativ zum Unterkiefer anderes Verhalten herauskommt.

Zusammenfassung

Die Arbeit ermittelt anhand eines großen Kollektivs Formeln für jedes Alter und Geschlecht getrennt, welche es erlauben, von der zygon- respektive tragion-respektive Zahnbreite auf die durchschnittlich dazugehörnde Kieferbreite zu schließen. Kritik der Werte des *Pontschen* Indexes und der *Bergerschen* Relation.

Zugleich wird eine neue, leicht faßbare grafische Darstellungsart von statistischen Größen, wie Korrelations-Koeffizient, Regressions-Gerade, Streuung, Variationsbreite und Norm gezeigt.

Im letzten Teil wird eine einfache Herstellungsmethode für spezielle Kieferabdruck-Modelle beschrieben, an denen direkt geplante Kieferdehnung und Zahnstellungskorrekturen zum voraus ausgeführt und ausgewertet werden können.

Summary

Formulae have been worked out for both sexes of different age in order to relate the breadth of either the zygion or the tragon or the tooth to the average breadth of the jaws. Critics about the values of *Pont's* Index and of *Berger's* relation.

A new simple graphic representation of statistical quantities e.g. correlation-coefficient, amount of regression, deviation, amount of variation and norm has been demonstrated.

The last part deals with the description of a simple method for the reconstruction of some special jaw casting-models, in order to perform experimentally that amount of stretching the jaw and altering the position of teeth which may be applied later to the living.

Résumé

Le travail, basé sur un grand nombre de mensurations, permet de trouver des formules pour les différents âges et les deux sexes, montrant une corrélation entre les diamètres bi-zygomatique, bi-auriculaire et dentaire d'une part, et bi-goniatique d'autre part. Critique des valeurs de l'indice de *Pont* et de la relation de *Berger*.

En même temps est montré un nouveau mode de représentation graphique facile à comprendre des valeurs statistiques, comme le coefficient de corrélation, les droites de régression, la variance, l'étendue et la norme.

Dans la dernière partie est décrite une méthode simple de fabrication de moulages de mâchoires sur lesquels peuvent être réalisés d'avance et appréciés les projets des expansions et des corrections de malpositions.

LITERATUR

- Berger, H.*: KorrespBl. Zahnärzte 51, 98, 1927; Fortschr. Orthod. 2, 309, 1932.
 Amer. J. Orthod. 38, 369, 1952.
Cramèr, H.: Random variables and probability distributions; Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. 36, Cambridge 1937.
Detwiler, E.: Verh. naturforsch. Ges. Basel 54, 123, 1945.
Falck, K.: Ergebn. ges. Zahnheilk. 7, 88, 1923.
Fisher, R. A.: J. roy. statist. Soc. 85, 597, 1922.
Harth, G.: Dtsch. Mschr. Zahnheilk. 48, 1537, 1930.
Izard, G.: Int. J. Orthod. oral Surg. 13, 582, 1927.
Korkhaus, G.: Fortschr. Zahnheilk. 5, 810, 1929.
Linder, A.: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. Birkhäuser, Basel 1945.
Linder, H.: Fortschr. Orthod. 1, 22, 211, 559, 1931.
Martin, R.: Lehrbuch der Anthropologie. G. Fischer, Jena 1928.
Meyer, O. E.: Dtsch. Mschr. Zahnheilk. 47, 1137, 1929.
Pont, A.: Z. zahnärztl. Orthop. 3, 306, 1909.
Radeff, L. J.: Sind Verschiedenheiten der Zahnbreiten bei männlichen und weiblichen Bulgaren festzustellen? Med. Diss. Würzburg 1936.
Schür, U.: Schweiz. Mschr. Zahnheilk. 37, 559, 1927.
Williams, P.: Dental Cosmos 59, 695, 1917.

Eingegangen: 26. Juni 1955.